Vorlesung 7a

Normalverteilung und Zentraler Grenzertsatz

Teil 2:

Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^n$

(vgl. Buch S. 71)

In Teil 3 der Vorlesung 6b formulierten wir den

Satz über die Unabhängigkeit von ZV'en mit Dichten:

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i$, $\;i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

Dazu passt die folgende Situation:

Sei $Z := (Z_1, \ldots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \ldots, Z_n$ sind unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(- \frac{|a|^2}{2} \Big)\, da \,, \quad a \in \mathbb{R}^n \,,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Die Dichte der Standard-Normalverteilung auf $\mathbb{R}^n$

ist rotationssymmetrisch.

Analog zum Fall $n = 2$ gilt deshalb:

Ist $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^n$

dann ist $Y := \dfrac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}$ $\quad$ N$(0, 1)$-verteilt.

Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1\vec{e}_1 + \cdots + Z_n\vec{e}_n$

zum Einheitsvektor $\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$.